

РЯДИ ФУР'Є В МЕДИЦИНІ: АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИГНАЛІВ СЕРЦЯ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

У роботі розглядається застосування рядів Фур'є для аналізу електричних сигналів серця. Також описано базові поняття у сфері кардіології та наведено приклад розрахунку для простої моделі ЕКГ-сигналу.

Ключові слова: вища математика, електрокардіограма, перетворення Фур'є

Abstract

This paper discusses the use of Fourier series for the analysis of electrical signals of the heart. Basic concepts in the field of cardiology are also described, and an example calculation for a simple ECG signal model is provided.

Keywords: higher mathematics, electrocardiogram, Fourier transform

Вступ

Важливим мотиваційним аспектом фундаментальної та професійної підготовки студентів технічних спеціальностей є регулярна демонстрація прикладного застосування базових фундаментальних математичних понять та теорій.

Сучасна медицина значною мірою спирається на аналіз біосигналів, таких як сигнали серця, для діагностики і моніторингу стану пацієнтів. Одним із ключових методів математичного аналізу таких сигналів є розкладання їх у ряди Фур'є. Цей розклад дозволяє отримати детальну інформацію про частотний склад сигналу та виявити аномалії, що можуть свідчити про серцеві захворювання.

Дослідження

Для наочного прикладу розглянемо процес аналізу електричних сигналів серця (ЕКГ) з використанням рядів Фур'є. Основною метою є виділення основних гармонік, що дозволяють визначити основні частоти та виявити аномалії в роботі серця.

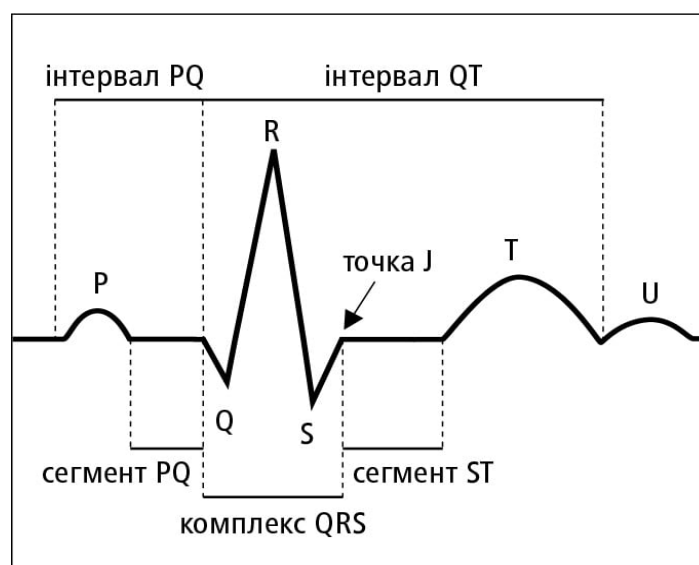


Рисунок 1. Електрокардіограма.

Електрокардіограма (ЕКГ) — це періодичний сигнал, який складається з низки циклів, кожен з яких включає зубці P, Q, R, S, T та хвилю U (з'являється у разі електролітичних порушень). Для аналізу цього сигналу використаємо лише один кардіологічний цикл, щоб виділити гармоніки для цієї частини сигналу.

Кардіологічний цикл - це сукупність послідовних фаз, через які проходить серце під час одного повного циклу його роботи. Основними компонентами кардіологічного циклу є систола та діастола:

- Систола - це фаза скорочення серцевого м'яза, під час якої кров викидається з серця до артерій.
- Діастола - це фаза розслаблення серцевого м'яза, під час якої серце наповнюється кров'ю.

Нехай сигнал $f(t)$ має період T . Позначаємо його значення для одного кардіологічного циклу. Скористаємося формулою розкладу ряду Фур'є за косинусами та синусами:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right), \quad (1)$$

де:

- a_0 — середнє значення сигналу,
- a_n і b_n — коефіцієнти, які визначають амплітуду кожної гармоніки.

Далі нам треба розрахувати коефіцієнти a_0 , a_n , b_n . Для спрощення, припустимо, що наш ЕКГ-сигнал записаний на інтервалі $[0, T]$.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad (4)$$

Приклад розрахунку для простої моделі ЕКГ-сигналу.

Припустимо, що наш сигнал можна апроксимувати такою моделлю:

$$f(t) = 1.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right), \quad (5)$$

де T - період серцевого циклу. У цій моделі маємо дві гармоніки: основну з частотою $\frac{2\pi}{T}$, та другу з частотою $\frac{4\pi}{T}$. Коефіцієнти $a_1 = 1.5$ та $b_2 = 0.5$ у наведеному прикладі є умовними значеннями, обраними для демонстрації принципу розкладу сигналу ЕКГ на гармоніки.

У реальному аналізі біосигналу ці коефіцієнти обчислюються на основі конкретних значень функції $f(t)$ шляхом інтегрування протягом одного періоду сигналу. Щоб отримати точні значення коефіцієнтів, використовуються формули (3) та (4).

Продемонструємо графічно розклад сигналу ЕКГ на окремі гармоніки за допомогою рядів Фур'є.

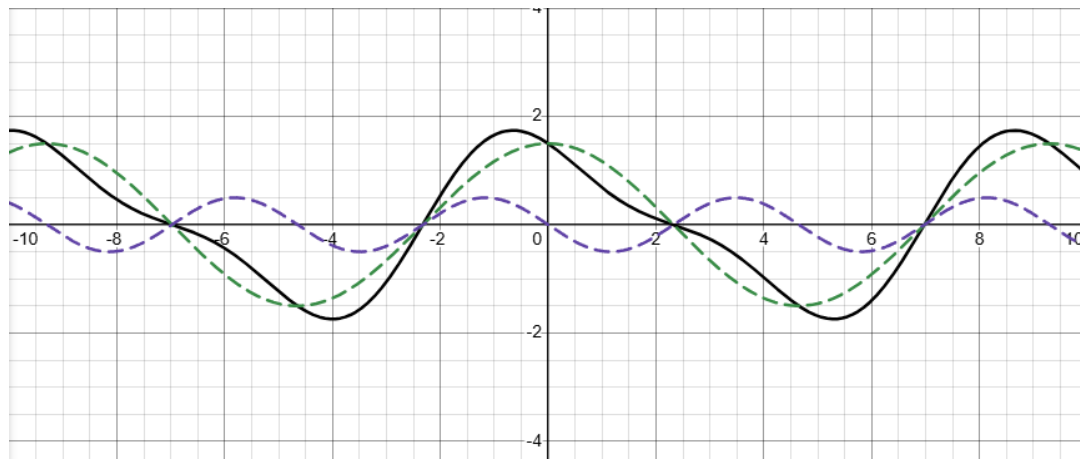


Рисунок 2. Зображення розкладу сигналу ЕКГ на окремі гармоніки за допомогою рядів Фур'є.

На графіку зображено розклад сигналу ЕКГ на окремі гармоніки за допомогою рядів Фур'є:

1. Чорна крива - оригінальний сигнал ЕКГ, який є сумою двох гармонік.
2. Синя пунктирна лінія - перша гармоніка (основна частота), що задається формулою $1.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$.
3. Зелена пунктирна лінія - друга гармоніка, яка додає періодичні коливання до сигналу за формулою $0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$.

Додаючи ці гармоніки, ми відтворюємо форму сигналу, близьку до ЕКГ. Такий аналіз допомагає виявити та аналізувати основні частоти, що присутні в біосигналі.

Інтерпретація результатів

Коефіцієнти a_1 і b_2 показують, що в ЕКГ-сигналі переважає основна частота (перша гармоніка), яка відповідає нормальному серцевому циклу, і друга гармоніка, яка може вказувати на певну нерівномірність або шум у сигналі. Аналізуючи ці значення, лікар може визначити наявність аномалій, якщо амплітуди вищих гармонік, таких як других, третіх порядків тощо, будуть суттєвими.

Висновки

Цей приклад демонструє, як за допомогою рядів Фур'є можна розкласти ЕКГ-сигнал на окремі частотні складові, що дозволяє чіткіше ідентифікувати ключові частоти та виявляти відхилення від нормального функціонування серця.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Воробій В. Система аналізу електричних сигналів серця : Магістерська робота. URL: http://lib.pnu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/14577/1/Превисокова_Воробій.pdf (дата звернення: 10.11.2024).
2. Електрокардіографія — вікіпедія. Вікіпедія. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Електрокардіографія> (дата звернення: 10.11.2024).
3. Коломієць А.А. Теорія і практика фундаменталізації математичної підготовки майбутніх бакалаврів галузі знань «Електроніка та телекомунікації». Дис. д-ра пед. наук: 13.00.04. Рівне, 2023. 628 с. URL: https://www.rshu.edu.ua/images/afto/anons/kolomiec_aa_disert.pdf (дата звернення 1.03.2025).

Іщук Владислав Павлович — студент групи РТ-23б, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: vlad.ischuck2006@gmail.com

Коломієць Альона Анатоліївна — д. пед. н, доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kolomiets@vntu.edu.ua

Ishchuk Vladyslav Pavlovych — student of the group RT-23b, Departments of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vlad.ischuck2006@gmail.com

Kolomiets Alyona Anatoliivna — Doctor of Pedagogy, Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: kolomiets@vntu.edu.ua